岡山大学経済学会雑誌 42（２），2010，77 ～ 87

消費税を財源とする少子化対策と持続的世代間格差に関する予備的考察

横　尾　昌　紀

1　は じ め に

本稿では，昨今わが国の政府によって施行された「子ども手当て」や高校授業料実質無償化のような少子化対策が経済成長にもらたす影響を単純なマクロ経済モデルの枠組みで考察する。特に，わが国で将来的に消費税率が引き上げられる可能性を考慮に入れ，消費税によって少子化対策の財源が賄われると想定する。その場合，出生率や経済成長はどのような時間経路を辿りえるだろうか？また，ありうべき世代間の格差ないし不平等に対し，このような政策はどのような影響を及ぼすだろうか？本稿では，こうした問題に焦点を当てる。

枠組みとして，Diamond（1965）型の，家計が２期間生きる世代重複モデルを用いる。さらに生産関数と効用関数の両方を Cobb-Douglas 型と仮定する。このような仮定は極端に単純化しすぎていると思われるかもしれないが，後でみるように，このような仮定のもとでさえも，上記の政策を考慮しないモデルと考慮するモデルで動学的特性に大きな違いが生じることが明らかとなる。すなわち，上記の政策を考慮しないモデルでは，よく知られているように，正の初期条件（一人当たりの資本ストック）が与えられれば，経済は単調に定常状態へ推移するが，以下の示す方法で政策を考慮するモデルでは，内生的な周期的あるいは非周期的変動が数値シミュレーションにより見出される。このような持続的な内生変動は世代間に格差をもたらす。言い換えると，少子化対策はときとして持続的な世代間格差をもたらすことがある，ということを数値計算により示す。

文献との関連を若干述べておく。出生率の内生化に関する議論は，古くは Malthus の人口論に遡るのであろうが，現古典的なものでは，例えば，Barro and Becker（1989）が挙げられよう。成長モデルの中では，例えば，Pavilos（1995）は，Cass-Koopmans モデルで内生的な出生選択による複数均衡の発生を，Blackburn and Cipriani（2002）は，世代重複モデルでやや込みいった長生きの可能性と内生的な出生率と選択を議論し，複数均衡の可能性を調べている。Blackburn and Cipriani のような複数均衡モデルは，基本的に閾値を挟んで安定な定常状態が複数発生し，初期条件に応じて成長･出生パターンが異なることを示すものであるが，本稿では，Ishida and Yokoo（2004）に類する周期変動を伴う閾値非線形性に加え，Yokoo and Ishida（2008）に類して，異質性に関する連結関数を導入し，カオス的な動学を導く。Azariadis（1993）にも，Malthus 的な出生率循環に関するラフスケッチがなされているが，本稿での出生率の内生化とは異なる。

早速，以下でモデルを導出し，その動きをシミュレートしてみよう。

2　人口成長率を内生化した世代重複モデル

2.1　ベンチマークモデル

まず比較の対象として，少子化対策を考慮せず，人口成長率が外生的に与えられている通常の世代重複モデルを便宜上導出しておく。

まず時間は離散的に 0 から無限大まで続く。家計は 2 期間(若年期と老年期)生きる個人からなる。t 期に生まれ個人は，若年期の消費 c_t^y と次期の老年期の消費 c_{t+1}^o から得られる効用 $u(c_t^y, c_{t+1}^o)$ の最大化を行う。若年期に 1 単位の労働供給を非弾力的に行い，賃金所得 w_t を得て，一部をその期の消費 c_t^y に，残りを貯蓄 s_t に回す。貯蓄は次期の企業に貸付けられ，老年となった個人はその期末に生産のうちの資本分配分を消費して生涯を終える。後の議論のために，消費税を導入しておこう。消費税率を $\tau \geq 0$ として，効用関数を Cobb-Douglas 型とすると，家計の直面する効用最大化問題は以下の通りである。

$$\max_{c_t^y, c_{t+1}^o, s_t} \quad (1-s)\log c_t^y + s\log c_{t+1}^o \tag{1}$$

$$\text{s.t.} \quad (1+\tau)c_t^y + s_t = w_t, \tag{2}$$

$$(1+\tau)c_{t+1}^o = (1+r_{t+1}^e)s_t. \tag{3}$$

ここで，係数 $s \in [0,1]$ は，後でみるように賃金所得に対する貯蓄割合である。また，r_{t+1}^e は貸付けに対する t 期に予想される $t+1$ 期の期待実質利子率である。これを解くと，家計が行う貯蓄水準は，

$$s_t = sw_t \tag{4}$$

と書ける。効用関数の性質より，貯蓄水準は期待利子率や消費税率に依存しない。

次に企業行動をみる。t 期における資本ストックを K_t，労働を L_t と表し，一人当たりの資本ストックを $k_t = K_t / L_t$ と表す。企業の生産関数を資本と労働に関して 1 次同次の Cobb-Douglas 型とし，一人当たりの産出量を集約型の生産関数を用いて，

$$f(k) \quad = \quad Ak^\beta \tag{5}$$

で表す。ただし，$A > 0$ は全要素生産性を表すパラメータ，$\beta \in (0,1)$ は資本分配率である。t 期の 1 単位当たりの資本のレンタル費用を ρ_t とすると，1 階の条件より，

$$\rho_t \quad = \quad f'(k_t), \tag{6}$$

$$w_t \quad = \quad f(k_t) - k_t f'(k_t) =: w(k_t) \tag{7}$$

が成り立つ。また，資本減耗率を $\delta \in [0,1]$ とすれば，無裁定条件より，

$$\rho_t = \delta + r_t \tag{8}$$

が成り立つ。

労働人口，すなわち若年期の人口の成長率は外生的に $n_t = n$ $(t = 0, 1, 2, \cdots)$ で与えられており，以下

の推移式にしたがって変動する。

$$L_{t+1}=(1+n_t)L_t=(1+n)L_t. \tag{9}$$

資本市場の均衡条件より，

$$K_{t+1}=s_tL_t \tag{10}$$

なので，（４），（５），（７），（９），(10) を使うと，この経済の推移式は，

$$k_{t+1}=\frac{sw(k_t)}{1+n_t}=\frac{s(1-\beta)A}{1+n}k_t^{\beta}, \qquad t=0,1,2,\cdots \tag{11}$$

となる。初期条件 $k_0>0$ に対し，t が無限大に行ったとき，k_t は定常状態

$$k^*=\left(\frac{s(1-\beta)A}{1+n}\right)^{\frac{1}{1-\beta}} \tag{12}$$

に単調に収束する。ここで，t 期の任意の一人当たり資本ストック（定常状態を含む）に対し，人口成長率 n の増加は $t+1$ 期の資本ストックを減少させることに注意しておく。

2.2　消費税と少子化対策

さて，ここで上記の標準的な世代重複モデルから出発して，以下のような状況を追加的に想定しよう。まず政府を登場させる。政府は各期ごとに消費税を徴収する。税の性質により，若年期からも老年期からも徴収することになる。この消費税による税収を財源として，政府は“少子化対策”を行うと仮定する。その政策の形態は，例えば,「子ども手当て」であったり，高校や大学の授業料の無償化であったり，待機児童を減少させるような公的な保育所制度の整備や改善であったり，出産休暇や育児休暇に対する公的賃金保証であったりするかもしれない。

家計については，通常の消費・貯蓄の選択の他に，産む子どもの数を決定すると仮定する。議論を単純化するために，家計は若年期にそれぞれ「多産」か「少産」かのミクロレベルの出生率の離散選択を行うとしよう。単純化のために，以下の仮定を設ける。まず，多産か少産の選択は政府が行う少子化対策の規模にのみ依存すると仮定する。すなわち，直接的な自己の賃金所得水準そのものとは独立に行われるということである。この政策の規模が大きければ,家計は「多産」を選択しやすくなり，逆に小さければ「少産」を選択しやすくなる。ただし，子どもを持つこと自体に対する個人の嗜好の違い，妊娠･出産能力の個人差，不本意な妊娠，出産の失敗などによる個人の異質性も考慮に入れる。

以上のことをモデルの中に組み入れよう。まず，政府は各期ごとに財政を均衡させると仮定する。すなわち，任意の t 期におけるマクロ的な税収＝政府支出であることに注意する。ここで，$\delta=1$，および，完全予見 $r_t=r_t^e$ を仮定すると，

$$(1+\tau)c_t^y = (1-s)w_t, \tag{13}$$

$$(1+\tau)c_t^o = sr_tw_{t-1} \tag{14}$$

となるので，t 期における政府支出 G_t は，

$$G_t=\tau(L_tc_t^y+L_{t-1}c_t^o)=\frac{\tau}{1+\tau}\left((1-s)w_tL_t+sr_tw_{t-1}L_{t-1}\right) \tag{15}$$

と表せる。出産をする若年期の人口一人当たりの政府支出 $g_t=G_t/L_t$ は，（６），（７），（９），(11)

を考慮すると，

$$
\begin{aligned}
g_t &= \frac{\tau}{1+\tau}\left((1-s)w_t + \frac{sr_t w_{t-1}}{1+n_{t-1}}\right) \\
&= \frac{\tau}{1+\tau}\left((1-s)f(k_t) + k_t f'(k_t)\right) \\
&= \frac{\tau}{1+\tau}(1-s+\beta)Ak_t^{\beta}
\end{aligned} \tag{16}
$$

となる。

家計が「多産」を選択したときのミクロレベルの家計の出生率（＝人口成長率）を $\overline{n}$，「少産」を選択したときの出生率を $\underline{n}$ とする。ただし，$\overline{n} > \underline{n} >$ -1 である。まず，家計に異質性がない場合，出生率の選択は，ある閾値 $\theta > 0$ に対し，

$$
n_t = \begin{cases} \overline{n}, & \text{if} \quad g_t \geq \theta, \\ \underline{n}, & \text{if} \quad g_t < \theta \end{cases} \tag{17}
$$

としよう。ここで，家計の異質性を導入する。t 期生まれのインデックス i の個人の閾値 $\theta_{i,t}$ が，

$$
\theta_{i,t} = \theta + \sigma\epsilon_{i,t} \tag{18}
$$

で与えられている。ただし，$\sigma > 0$ は異質性の度合いを表すパラメータであり，$\varepsilon_{i,t}$ は，独立同一分布の確率変数で，平均が 0 であるとする。いまこの確率変数が正規分布の代用として，ロジスティック分布に従うとしよう。そのとき，マクロ的な人口成長率は，

$$
\begin{aligned}
n_t &= \overline{n}\mathrm{P}(g_t \geq \theta_{i,t}) + \underline{n}\mathrm{P}(g_t < \theta_{i,t}) \\
&= \frac{\overline{n}}{1+\exp\left(\frac{\theta - g_t}{\sigma}\right)} + \frac{\underline{n}}{1+\exp\left(\frac{g_t - \theta}{\sigma}\right)}
\end{aligned} \tag{19}
$$

と表せる。異質性がない場合は，上の式で，$\sigma \to 0$ とした極限の状況で表すことができる。

2.3 最終的なモデル

これまでの議論をまとめると，研究すべき我々の経済モデルは（11），（16），（19）から構成されることが分かる。読者の便宜のために，まとめて再掲しておくと，以下のようになる。

$$
\begin{cases}
k_{t+1} = \dfrac{sA(1-\beta)k_t^{\beta}}{1+n_t}, \\
n_t = \dfrac{\overline{n}}{1+\exp\left((\theta - g_t)/\sigma\right)} + \dfrac{\underline{n}}{1+\exp\left((g_t - \theta)/\sigma\right)}, \\
g_t = \dfrac{\tau}{1+\tau}(1-s+\beta)Ak_t^{\beta}.
\end{cases} \tag{20}
$$

これらの連立差分方程式は代入することで，k_t に関する 1 階の差分方程式に還元できることが直ちに分かる。後のために，この関係を，

$$k_{t+1} = \varphi(k_t) \tag{21}$$

で表しておく。

3　非線形性と内生的循環の発生

出生率選択に関する平均的閾値 θ を，k_t について解く。それを $\hat{k}$ とおくと，それは（$\theta = g_t$）より，

$$\hat{k} = \left(\frac{(1+\tau)\theta}{\tau(1-s+\beta)A} \right)^{\frac{1}{\beta}} \tag{22}$$

となる。この k に関する閾値は σ に依存しないことに注意する。$\sigma \to 0$ としたとき，すなわち，異質性がないとき，推移式（20）は，

$$k_{t+1} = \begin{cases} \dfrac{s(1-\beta)Ak_t^{\beta}}{1+\overline{n}} & \text{if} \quad k_t < \hat{k}, \\ \dfrac{s(1-\beta)Ak_t^{\beta}}{1+\underline{n}} & \text{if} \quad k_t \geq \hat{k}, \end{cases} \tag{23}$$

となる。これは，推移式がもはやベンチマークモデルの推移式（11）のように単調増加でないことを意味する。さらに，パラメータが，

$$\frac{s(1-\beta)A\hat{k}_t^{\beta}}{1+\overline{n}} < \hat{k} < \frac{s(1-\beta)\hat{k}_t^{\beta}}{1+\underline{n}} \tag{24}$$

を満たすとき，式（23）は定常状態をもたず，任意の正の初期値から出発した軌道は，内生的な変動を持続することが分かる。パラメータ条件（24）を満たしつつ，十分小さな正の σ を取ったときの，推移式(20)の，(k_t, k_{t+1})- 平面での典型的なグラフを図１に表す。ここでは, パラメータの値をそれぞれ,

$$A = 4, \quad \beta = s = 0.4, \quad \tau = 0.1, \quad \theta = 0.25, \quad \sigma = 0.002, \quad \underline{n} = -0.3, \quad \overline{n} = 0.3 \tag{25}$$

として計算してある。出生率に関しては, 図を作るときに見やすいようにかなり誇張してあるが, まったく本質的ではない。上のパラメータのもとでの，推移式（20）が生成する軌道を図２に表す。‘蜘蛛の巣’のような複雑な循環が観察できる。ただし，図２のプロット部分の反復数は，見やすいように，意図的に少なめ（100 回）に設定してある。

図３において，パラメータが（25）であるときの，推移式（20）が生成する一人当たり資本ストック $\{k_t\}$ の時系列を，図４において，出生率（＝人口成長率）$\{n_t\}$ の時系列を表示する。いずれの図の作成においても，過渡的な部分は十分長く除去してある。図２から推測されるように，決定論的なモデルでありながら複雑な乱高下が観察できる。

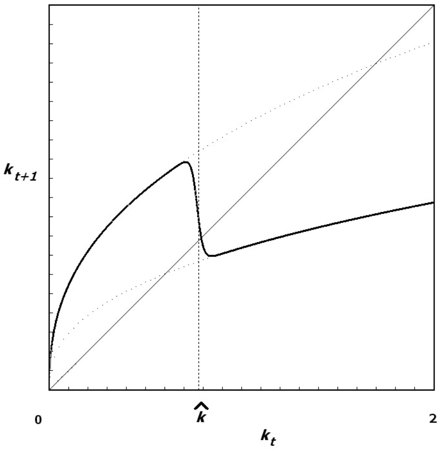

図１：推移式のグラフ。閾値 $\hat{k}$ の左側は概ね低い出生率，右側は高い出生率が選択されている。A=4，s= β =0.4，θ =0.25，τ =0.1，σ =0.002，$\underline{n}$=-0.3，$\overline{n}$=0.3，

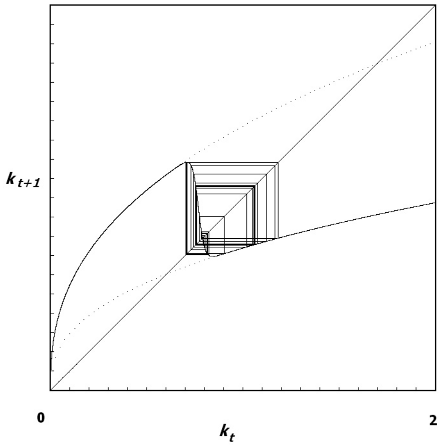

図２：カオス的解軌道。反復を増やすと黒く塗りつぶされるので，反復数は，過渡的な部分を除いた後，100回に留めてある。

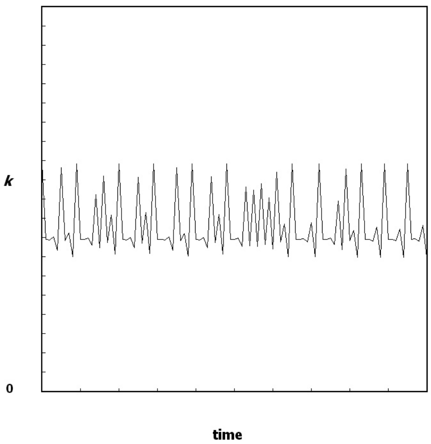

図３：一人当たり資本ストックの時系列。パラメータ値は図１と同じ。

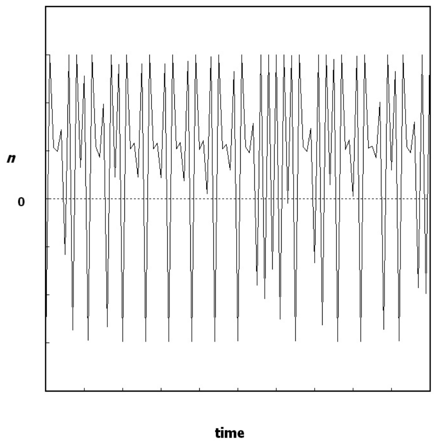

図４：出生率の時系列。パラメータ値は図１と同じ。

4　消費税の引き上げに対する比較動学

消費税率とマクロ経済変動について調べてみる。家計の異質性の度合い σ が十分小さい場合を考えよう。まず，極端な状況から考える。最初に，消費税率 τ をゼロに近づけると，(22)から分かるように，閾値 $\hat{k}$ は無限大に発散する。つまり，事実上，人口成長率 $n_t = \underline{n}$ のもとでの推移式（11）の定常状態が長期的に達成される。逆に，τ を大きくしていくと，他のパラメータにもよるが，事実上，人口成長率 $n_t = \overline{n}$ の推移式のもとでの定常状態が達成されやすくなる。問題は，‘中間的な’消費税率の

値に対する動学的挙動である。いま，τ を除く（25）のパラメータ値のもとで，τ を，わが国で採用されている 5％から，連続的に 13％まで引き上げた場合の推移式（20）に対する分岐図を $\{k_t\}$ について図 5 で表す。

図 5 において, $\tau = 0.05$ では, 経済は事実上 $n = \underline{n}$ に対する推移式(11)の定常状態に収束し, $\tau = 0.13$ では，経済は事実上 $n = \bar{n}$ に対する推移式（11）の定常状態に収束することが反映されている。その中間に位置する τ については複雑な挙動が見られる。

推移式が図 1 でみたような，区間上の N 字型の写像となるので，そのような写像の族についてしばしば観察される周期倍分岐（period-doubling bifurcation）と逆方向の周期倍分岐（period-halving bifurcation）のカスケードがこの場合でも確認できる。周期 2^n 型の漸近安定な周期アトラクタのカスケードを通じてカオス的なアトラクタまで到達しているかどうか，同じパラメータの組に対し，Lyapunov 指数を計算し，図 6 に表す。

推移式（20）の別表現（21）を使えば，対応する Lyapunov 指数 λ は,

$$\lambda = \lim_{t\to\infty} \frac{1}{t} \sum_{j=0}^{t-1} \ln|\varphi'(k_j)| \tag{26}$$

と定まる。ここでの数値シミュレーションでは，導関数の評価を直接は使わずに，誤差の変化率の自然対数値の絶対値の平均を取ることでこれを近似的に求めている。Lyapunov 指数はカオスの特徴のひとつである初期値鋭敏性を測るものである。よって，通常のように $\lambda > 0$ であることをもって，その経済系がカオス的であるとするならば，図 6 より，7％から 11％付近の間の消費税率に対し，カオスが頻繁に発生していることが読み取れる。

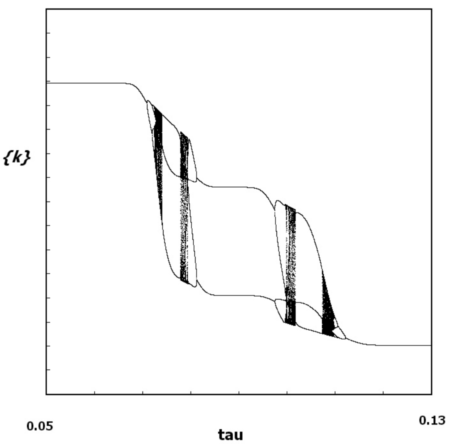

図 5：分岐図。消費税率 $\tau \in [0.05, 0.13]$ に対する一人当たり資本ストックの流列を対応させてある。

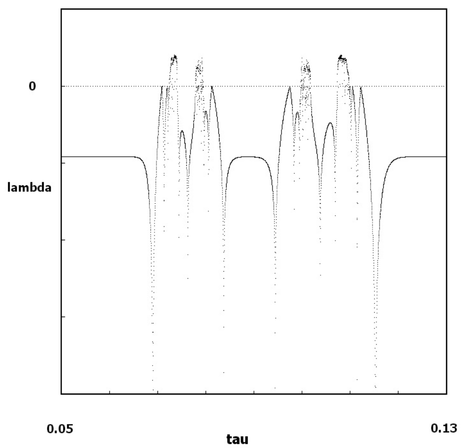

図 6：Lyapunov 指数。$\lambda > 0$ がカオスを示す。パラメータは全て図 5 と同じ。

5　持続的な世代間格差

経済が定常状態に収束しない場合の問題のひとつには，世代間の格差が生じるということが考えられよう。このモデルでは，効用関数が世代を通じて不変であると仮定されているので，指数をとった効用の最大値関数の値を比較するという方法で格差を測定しよう。税率 τ に依存する，指数をとった効用の最大値関数 $\tilde{V}_\tau(k_t, k_{t+1})$ は,

$$\begin{aligned}\tilde{V}_\tau(k_t, k_{t+1}) &= \left(\frac{1-s}{1+\tau}w(k_t)\right)^{1-s}\left(\frac{s}{1+\tau}f'(k_{t+1})w(k_t)\right)^{s} \\ &= \frac{sA(1-\beta)k_t^{\beta}}{1+\tau}\left(A\beta k_{t+1}^{\beta-1}\right)^{s}\end{aligned} \tag{27}$$

である。ここで推移式（21）を考慮すると，t 期に生まれた個人の最大効用は,

$$V_\tau(k_t) = \tilde{V}_\tau(k_t, \varphi_\tau(k_t)) \tag{28}$$

と表せる。世代間格差とは，この値が生まれた世代によって異なるということである。よって，十分長く時間が経過した後も，この値が収束しなければ，格差が持続していると言えるであろう。よって，消費税率が τ のときの持続的な世代間格差 $\Delta(\tau)$ を,

$$\Delta(\tau) = \limsup_{t\to\infty} V_\tau(k_t) - \liminf_{t\to\infty} V_\tau(k_t) \tag{29}$$

で表す。ここで,（29）がうまく定義されるためには，初期条件 k_0 と独立に上記の値が定まることが必要があるが，ひとつのアトラクタに収束する限りは位相推移性により問題はないと考えられる。図５や図６と同じパラメータの組に対し，持続的な世代間格差を計算し，プロットしたものが図７である。

予想がつくように，漸近安定な定常状態が安定な周期２の周期点に分岐するときの２箇所の分岐点の間で持続的世代間格差が生じていることが分かる。興味深いのは，‘格差のピーク’が生じている $\tau = 0.08$ 近辺や $\tau = 0.1$ 近辺でカオスが頻繁に発生している一方，同じくカオスが発生している $\tau = 0.072$ 近辺や $\tau = 0.11$ 近辺ではそのようなピークは確認できないことである。

参考までに，図８にて，各世代の最大効用の値を平均したものを τ ごとにプロットしてみる。パラメータは図７の場合と同じである。かすかな凹凸を除いて，比較的なだらかに τ とともに減少する様子が見て取れる。変動が発生している場合でも，軌道は定常状態の前後を行き来するため，振れ幅が大きくても互いに相殺するので，このような形状になると推測される。

6　まとめと議論

生産関数と効用関数が共に Cobb-Douglas 型である２期間の単純な世代重複モデルに，消費税を徴収し，少子化対策を行う政府と，その少子化対策に応じて出生率を離散的に選択する家計とを導入した。そこで，均衡財政による少子化対策が周期的変動あるいはカオス的変動を伴う内生的な成長循環

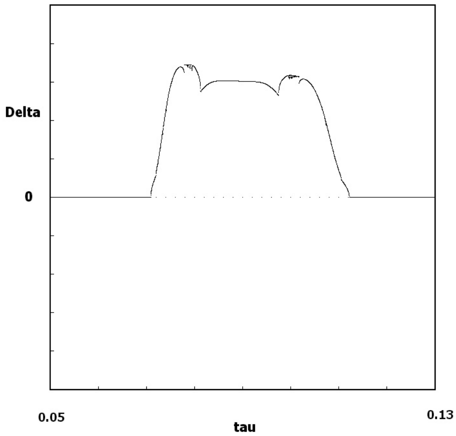

図７：持続的世代間格差。パラメータは図５と同じ。Δ＞０が格差あり，Δ＝０が格差なし。

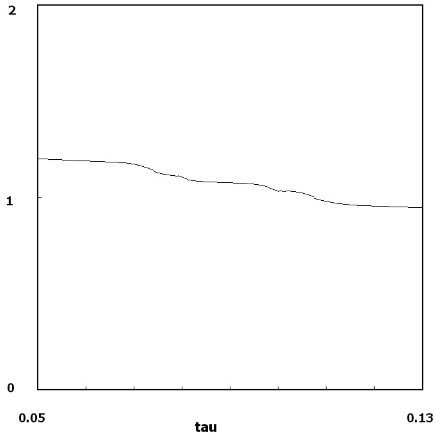

図８：効用の最大値関数値の時間平均。パラメータは図５と同じ。

や出生率循環を引き起こす可能性があることを数値計算で示した。その場合，更に世代間に持続的な経済格差が生み出されることを数値的に示した。このことは，政府による消費税率の選択の仕方によっては，それ自体が経済格差の源泉となりえることを示唆している。

いくつかの補足を行う。本稿では，消費税を考えたが，所得税でも同じような非線形動学に関する結果が導ける。重要な点は，人口成長率の上昇が内生化前の推移式（11）のグラフを下方に引き下げるが，内生化された人口成長率が一人当たり資本ストックの増加関数になるため，非単調な非線形性が発生することである。資本が蓄積されると，それに伴い税収が増え，少子化対策が大規模になされ，人口が増加する。しかし，これは長くは続かない。人口成長率の増加は一人当たりの資本の減少をもたらす。すると税収も落ち，少子化対策も不活発となり，人口は減少する。しかし，この状態も長くは続かない。今度は資本が蓄積されるのである。こうして話は繰り返すというのが，本稿で提示した出生率循環メカニズムである。

本稿のモデルでは，出生率選択の内生化に関して家計の行動が極端に単純化されているが，仮に他の文献にあるような内生化を行った場合でも，本稿のような政策依存の効果をも取り入れるならば内生的循環を生じさせるような非線形性を完全に打ち消すようなことはないであろう。よって，より精緻なモデルにおいても，本稿で得られたような結果はある程度再現できると予想される。

謝　　辞

本研究は文部科学省科学研究費（若手（B），No. 20730133，2008-2011 年）による研究助成を受けている。

参 考 文 献

Azariadis, C., 1993, *Intertemporal Macroeconomics,* Blackwell.

Barro, R.J. and Becker, G.S., 1989, Fertility choice in a model of economic growth, *Econometrica* 57, pp.481-501.

Blackburn, K. and Cipriani, G.P., 2002, A model of longevity, fertility and growth, *Journal of Economic Dynamics and Control 26,* pp.187-204.

Diamond, P. A., 1965, National debt in a neoclassical growth model, *American Economic Review 55,* pp.1126-1150.

Ishida, J., Yokoo, M., 2004, Threshold nonlinearities and asymmetric endogenous business cycles, *Journal of Economic Behavior and Organization 54,* pp.175-189.

Pavilos, T., 1995, Endogenous fertility, multiple growth paths and economic convergence, *Journal of Economic Dynamics and Control 19,* pp.1489-1510.

Yokoo, M. and Ishida, J., 2008, Misperception-driven chaos: theory and policy implications, *Journal of Economic Dynamics and Control 32,* pp.1732-1753.

Consumption-tax-financed fertility policy and persistent intergenerational inequality: A preliminary exploration

Masanori Yokoo

Abstract

The paper incorporates into a standard two-period-lived overlapping generations model with Cobb-Douglas utility and Cobb-Douglas production technology a government that levies a tax on consumption and households that have an opportunity to choose the fertility rate. The government spends all the tax revenue to finance the policy aiming to increase the national birth rate. Each young household faces a binary choice between ‘high fertility’ and ‘low fertility’, depending on the level of the government’s expenditure on that policy. The government’s policy together with the fertility choice by the households can give rise to strong nonlinearity in the transition equation of the economy. Numerical simulations show that the economic system exhibits endogenous cyclical or chaotic fluctuations in fertility for a large set of values of consumption tax rates. It is also numerically shown that some (inappropriate) choice of the tax rate by the government can cause persistent intergenerational inequality.